

Costel Chiteș
(coordonator)
Daniela Chiteș
Daniela Heuberger
Nicolae Mușuroia

Matematică

Teme suplimentare
PENTRU CLASA A V-A

SEMESTRUL

2

CORINT

Date despre autori:

COSTEL CHITEȘ – profesor gr. I la Colegiul Național de Informatică „Tudor Vianu” din București, doctor în matematică, lector dr. la Facultatea de Științe ale Educației, cu o activitate de 10 ani ca inspector de matematică în cadrul Inspectoratului Școlar al Municipiului București, membru în comitetul de redacție al „Gazetei Matematice”, redactor al revistei „Arhimede” și al revistei „Argument”; a publicat manuale pentru clasele IX-XII, culegeri de exerciții și probleme și lucrări cu caracter metodic.

DANIELA CHITEȘ – profesor gr. I la Școala nr. 79 „Academician Nicolae Teodorescu” din București, metodist, coautor al mai multor auxiliare școlare de matematică pentru gimnaziu, publicate la diferite edituri, cât și autor al unor articole în reviste de specialitate.

DANIELA HEUBERGER – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor a mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef adjunct al revistei de matematică „Argument”.

NICOLAE MUȘUROIA – profesor gr. I la Colegiul Național „Gheorghe Șincai” din Baia Mare, autor al mai multor manuale și culegeri pentru clasele de excelență și pentru olimpiadele școlare și al unor probleme propuse pentru diferite concursuri de matematică interjudețene și naționale, având articole și probleme originale publicate în reviste de prestigiu din țară („Gazeta matematică”, „R.M.T.”, „Argument”), redactor-șef al revistei de matematică „Argument”.

Redactare și tehnoredactare computerizată: Mihaela Zbarcea

Coperta: Andreea Apostol

Toate drepturile asupra acestei lucrări sunt rezervate Editurii CORINT,
parte componentă a GRUPULUI EDITORIAL CORINT.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Matematică: teme suplimentare pentru clasa a V-a: semestrul al II-lea/

Costel Chiteș, Daniela Chiteș, Daniela Heuberger, Nicolae Mușuroia. -

București: Corint, 2013

ISBN 978-973-135-746-1

I. Chiteș, Costel

II. Chiteș, Daniela

III. Heuberger, Daniela

IV. Mușuroia, Nicolae

51(075.33)

Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	5
Capitolul 1. Elemente de aritmetică	9
Capitolul 2. Frații ordinare; fracții zecimale	21
Capitolul 3. Probleme cu caracter combinatorial	29
Capitolul 4. Probleme pregătitoare pentru concursuri și olimpiade școlare	33
Capitolul 5. De vorbă cu cititorul – Întrebări	37
Matematicieni – Scurte note istorice	41
Indicații și răspunsuri	44
Tabelul numerelor prime mai mici de 10 000	60
Sugestii pentru lecturi suplimentare	61

Cuvânt-înainte

În prima parte a lucrării noastre intitulată „Matematică. Teme suplimentare pentru clasa a V-a – Semestrul I“, am abordat capitole necesare unei înțelegeri unitare a matematicii, dar și a aplicațiilor acesteia în alte domenii.

Trecerea din școala primară în gimnaziu și trecerea din gimnaziu la liceu reprezintă două praguri în formarea oricărui elev.

Ne referim la noul colectiv de elevi, la adaptarea la noile cerințe și standarde, cât și la volumul de informații, modul de procesare, la importanța actului educațional pe care familia o susține în acest demers.

Considerăm că actualii elevi au un mod mult mai rapid de achiziționare a informațiilor, în primul rând datorat mijloacelor electronice, gândesc mai rapid și sunt mai spontani fără a fi totdeauna și mai profunzi. Este datoria noastră, de părinți, de educatori, de a dirija în sens pozitiv aceste căutări în domeniul cunoașterii, atunci când acestea există. În caz contrar, trebuie încercate toate formele prin care se poate trezi în elev dorința de a învăța. În acest scop trebuie să punem la contribuție toate mobilurile posibile: aspirația spre mai bine, satisfacția de a produce bucurie părinților, rușinea de ignoranță, dezvoltarea spiritului competitiv etc.

Ne dorim ca această lucrare să vină în ajutorul celor ce își propun să treacă de nivelul programelor analitice de matematică, programe care acoperă doar o parte din cunoștințele necesare unei înțelegeri profunde a matematicii, pentru a se bucura de frumusețe ei și a multor aplicații în cele mai diverse domenii ale cunoașterii.

Vom încerca să vă determinăm în a vă construi propriile portofolii, în care să adăugați continuu noi probleme interesante, aplicații diverse și mici incursiuni proprii de cercetare a unor teme. Gazeta Matematică și alte reviste de specialitate vă vor direcționa, vă vor sprijini în încercările temerare de a performa. Susținem ideea de a utiliza internetul pentru o rapidă informare asupra unor subiecte, a unor aplicații ale matematicii în diverse domenii. Nu trebuie uitat că toate aceste informații sunt selectate dintr-o bibliografie specializată. Trebuie să ne deprindem cu modul de a selecta cărțile în funcție de nivelul la care ne aflăm, de gradul de accesibilitate a acestora, de scopurile studiului nostru. Să ne amintim expresia: „cum este biblioteca așa este și persoana care o posedă“. Zborul spre adevăr este imposibil în absența elanului, a patosului dionisiac.

Matematica și poezia au o arhitectură asemănătoare, având în bună măsură aceeași esență, susține academicianul Solomon Marcus în lucrarea [3]. „Poezia este un amestec de luciditate și vrajă. Luciditate înseamnă aici organizare a textului la diferite niveluri. Studiul acestei organizări nu poate fi dezvoltat cu finețea necesară fără ajutorul matematicii, deoarece organizare înseamnă structură, iar structurile sunt obiectul matematicii.“ [3].

Rezolvarea de exerciții și probleme poate fi privită ca un joc intelectual, completarea unui rebus. Relativ la joc, amintim patru trăsături importante ale

sale: caracterul agreabil, natura imprevizibilă, aspectul problematic și cel strategic. Sunt astfel stimulate diferite tipuri de gândire: logică, probabilistică, combinatorială, algoritmică, inductivă, analogică, lingvistică etc. Aceste tipuri de raționamente sunt utilizate adesea de către copiii de azi, datorită impactului informaticii în societate. Anumite noțiuni pe care noi, adulții, le învățăm în liceu, copiii noștri le însușesc operând cu acestea rapid și corect. Vom prezenta în acest sens un argument. Prin anii 1975, la olimpiada de matematică din U.R.S.S, elevii de clasa a V-a au primit din partea comisiei o problemă dificilă prin care se făcea selecția. În urma evaluării lucrărilor, comisia de matematică a fost uluită de numărul mare de participanți care au rezolvat corect problema dificilă. S-au întrebat apoi care este motivul? L-au găsit! Elevii utilizau un alt tip de gândire, algoritmic, logic, mai suplu decât se aștepta comisia. Profesorii din comisie nu puteau rezolva acel tip de problemă la vârsta elevilor evaluați. Din acest motiv credeau că problema este dificilă.

Ne fac o deosebită bucurie, copiii din ziua de azi, care rezolvă jocuri de lego cu o rapiditate demnă de invidiat. Acesta este motivul pentru care credem că nu trebuie să frânăm dezvoltarea intelectului copiilor noștri, ci trebuie să o susținem prin toate mijloacele pe care le avem. Învățarea continuă este necesară pe întreg parcursul vieții. Acest adevăr trebuie perceput de fiecare copil prin exemplul dat de adulți.

Un expert în rezolvări de probleme, spunea Howard W. Eves, „trebuie înzestrat cu două calități incompatibile: o imaginație neobosită și o stăruință plină de răbdare“.

Lucrarea noastră încearcă să sprijine o înțelegere mai clară a conceptelor, să prezinte modele de exerciții rezolvate, să evidențieze aplicații ale cunoștințelor asimilate.

Am preferat să dezvoltăm dorința cercetărilor proprii prin generalizări ale unor proprietăți, prin incursiuni în istoria matematicii.

Considerând că matematica nu este doar un instrument pentru celelalte științe, ci este un act de cultură indispensabil pentru fiecare dintre noi, am prezentat la finalul lucrării scurte prezentări ale matematicienilor citați, lansând elevilor interesați alte dezvoltări.

Lectura manualului, parcurgerea notițelor din clasă, rezolvarea temelor rămân fundamentale pentru elevi. Materialul nostru sperăm să dea o nouă lumină, să deschidă direcții spre aplicații, care în anii următori de școală își vor arăta rolul. Am ales tipuri importante de probleme pe care le-am analizat și rezolvat complet, propunând apoi lectorului exerciții asemănătoare. Am evidențiat probleme de numărare din motivele mai sus menționate. Caracterul agreabil al acestora, importanța lor în aplicațiile practice, cotidiene, au rolul de a evidenția utilitatea directă, indispensabilă a unor cunoștințe de matematică. Dorim ca acest material să ajute elevul pentru a ajunge de la nivelul manualului la nivelul problematicei concursurilor și olimpiadelor școlare.

Toate tipurile de probleme selectate, precum și noțiunile teoretice prezentate fac parte din cerințele concursurilor școlare.

Am inclus și exerciții propuse în Anglia la selecția elevilor care se prezintă la interviu, pentru a fi admiși la facultăți cu profil matematic.

Se remarcă numărul mare de probleme de aritmetică propuse, chiar dacă la liceu, în țara noastră, programa analitică nu mai prevede aceste noțiuni, acestea aflându-se doar în programa de olimpiadă. Este un motiv în plus ca elevii din gimnaziu să aprofundeze acest capitol al matematicii. Dorința noastră, a profesorilor, este ca elevii noștri să poată performa la oricare din facultățile din Europa sau din America. Desigur, elevii și studenții care absolvă facultățile din România este necesar să aibe aceeași atitudine pentru studiu.

În lucrare sunt prezentate o serie de exerciții rezolvate, ca model, iar pentru exercițiile propuse, la sfârșitul lucrării sunt prezentate indicații și răspunsuri.

Am atașat la final și tabelul numerelor prime mai mici de 10 000.

Invităm cititorul să încerce rezolvarea, prin efort propriu, a tuturor exercițiilor și, în cazul nereușitei, să apeleze la capitolul de indicații și soluții.

Sugestiile pentru lecturi suplimentare conțin surse deosebite, cărți de bibliotecă, de care nu te poți despărți. Lectura acestora făcută de mai multe ori, la intervale diferite de timp, îți dau adevărata lor valoare, crează uneori nostalgii. Așa cum în literatură există cărți excepționale, în toate celelalte domenii lucrurile stau la fel, deci și în matematică.

Este important ca elevul să se obișnuiască a cerceta singur, a descoperi metode noi de rezolvare, probleme noi, să-și pună continuu întrebări. Lucrarea noastră ajută în formarea unor deprinderi de lucru independente, în crearea propriilor portofolii. Aceste portofolii sunt evaluate de cadrul didactic și vor fi completate și îmbunătățite continuu în anii de școală.

Autorii

1. Elemente de aritmetică

Definiții

Un număr natural p , $p \geq 2$ se numește **prim** dacă are ca divizori doar pe 1 și p .

Exemple

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...

Un număr natural $n \geq 2$ care nu este prim se numește **compus**.

Ciurul lui Eratostene

Reamintim că ciur reprezintă sită. În ciur (sită) vor rămâne doar numerele prime mai mici decât n .

Matematicianul alexandrin Eratostene a dat o metodă prin care putem determina toate numerele prime mai mici decât un număr natural dat.

Metoda este ingenioasă și este utilizată cu eficiență și astăzi. Fie n un număr natural fixat, $n \geq 2$. Scriem numerele naturale $2, 3, 4, 5, 6, \dots, n-1, n$. Păstrăm numărul 2 și marcăm toate numerele multiplu de 2 care sunt mai mici decât n . După marcarea numerelor, primul număr nemarcat este 3. El este prim deoarece nu este divizibil cu 2. Lăsăm numărul 3 și marcăm toți multiplii lui 3 ce sunt mai mici decât n . Unele numere au fost deja marcate fiind multipli de 2. La următorul pas, primul număr nemarcat este 5. El este prim nefiind divizibil cu 2 sau cu 3. Lăsăm numărul 5 nemarcat și marcăm toți multipli de 5. Continuăm procedeul, iar la sfârșit, se va obține o secvență de numere nemarcate; acestea reprezintă numerele prime mai mici sau egale cu n . Această metodă de cernere a numerelor este cunoscută sub denumirea de *ciurul lui Eratostene*.

Notă

Pe baza acestui principiu au fost construite tabele de numere prime. În cazul numerelor mari au fost utilizate calculatoare performante. Astfel, la Los Alamos Scientific Laboratory au fost determinate în acest fel toate numerele prime până la 100 000 000. S-a demonstrat, încă din Antichitate, că șirul numerelor prime este infinit.

La sfârșitul lucrării sunt date toate numerele prime mai mici decât 10 000.

Exerciții propuse

1. a) Prin utilizarea ciurului lui Eratostene, să se determine toate numerele prime mai mici decât 100.

b) Câte numere naturale, nenule m există cu $m \leq 100$ care sunt compuse?

2. Care sunt numerele prime de două cifre care au suma cifrelor egală cu 5?

3. Care dintre următoarele numere:

87, 111, 113, 143, 149, 165, 167, 279, 281

este prim?

Notă

O metodă care stabilește prin calcul dacă un număr este prim, constă în împărțirea numărului dat la numere prime, în ordine crescătoare până când câtul devine mai mic decât împărțitorul.

Dacă nicio împărțire nu s-a efectuat exact, numărul considerat este prim. În caz contrar, numărul nu este prim.

Exemple: 87 se divide prin 3 sau se împarte exact prin 3. Rezultă că este compus. 111 se divide cu 3, deci este compus. 113 nu se divide prin 2, 3, 5, 7, deci este prim. Nu am verificat alte numere prime mai mari decât 7 deoarece pentru următorul număr prim care este 11 avem $11^2 = 121 > 113$.

Exercițiu rezolvat

4. Un număr prim p se numește **număr prim al lui Sophie Germain**, dacă $2p + 1$ este prim. Să se determine toate numerele prime $p \leq 100$ ce sunt numere prime ale lui Sophie Germain.

Soluție. Prin verificarea condiției pentru numerele prime $p \leq 100$, vom determina următoarele numere prime ale lui Sophie Germain: 2, 3, 5, 11, 23, 29, 41, 53, 83, 89.

Notă

Sophie Germain a arătat, în anul 1825, că marea teoremă a lui Fermat este valabilă în cazul numerelor prime p pentru care $2p + 1$ este prim. Astfel, printre marii matematicieni care s-au ocupat de marea teoremă a lui Fermat, a fost și Sophie Germain. Cu ajutorul calculatoarelor s-au determinat toate numerele prime Sophie Germain mai mici decât 10^{10} . Numărul acestora este de 26 569 515.

Exerciții propuse

5. Care este cel mai mare divizor propriu al numărului 360 ?
6. Fie x, y, z numere naturale nenule. Să se arate că 7 divide $4x + 8y + z$ dacă și numai dacă 7 divide $6x + 12y + 5z$.
(G.M.7-8-9 / 2010)
7. Pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, există p prim pentru care $p \mid n$.
8. Să se arate că:
 - a) $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$
 - b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?
(G.M.10 / 2012)
9. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulțimea $\{a \in \mathbb{N} \mid 4 \cdot 7^n < a < 7^{n+1}\}$ are 146 de elemente.
10. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulțimea $\{a \in \mathbb{N} \mid 3^n \leq a < 2 \cdot 3^{n+2}\}$ are 459 de elemente.
11. Câte cifre au numerele următoare scrise în baza 10:
 $A = (100^{50} - 1) : 9$; $B = (1000^{30} - 1) : 9$; $C = (10.000^{2345} - 1) : 9$.

12. Puteți scrie numărul 3629 ca sumă de puteri de 2?

13. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care mulțimea:

$$\{a \in \mathbb{N} \mid 5^{n+1} \leq a \leq 3 \cdot 5^{n+4}\}$$

are 9351 de elemente.

14. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și se definesc numerele $A_n = \overline{1234 \dots n}$.

Să se arate că din $9 \mid n$ rezultă $9 \mid A_n$.

(N. Negoescu, G.M. 1970)

15. Puteți scrie numărul 1 000 003 ca sumă de puteri distincte ale lui 2?

(Mathematics interview questions, England).

16. Să se arate că pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, numărul $1! + 2! + 3! + 4! + \dots + n!$ nu este pătrat perfect.

(Mathematics interview questions, England).

17. Fie numărul $M = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdots 2013$ produsul numerelor impare mai mici sau egale cu 2013 care nu sunt multiplu de 5. Care este ultima cifră a lui M ?

(Concursul LuminaMath, Ediția a XVI-a, Etapa a II-a)

18. a) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ și considerăm numerele $M_n = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_m 14^n}$. Să se determine numerele n pentru care $64 \mid M_n$.

b) Știind că literele sunt cifre ale sistemului zecimal, să se determine din egalitatea:

$$\overline{MATH} + \overline{WORK} = 10^4$$

(Concursul LuminaMath, Ediția a XVI-a, Etapa a II-a)

Exercițiu rezolvat

19. Fiind date numerele prime diferite p_1, p_2, p_3, p_4 , numerele naturale $x = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \cdot p_4^{a_4}$, $y = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot p_3^{b_3} \cdot p_4^{b_4}$, unde $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{N}$, atunci $(x, y) \cdot [x, y] = x \cdot y$.

$$\text{Soluție. } (x, y) = p_1^{\min\{a_1, b_1\}} \cdot p_2^{\min\{a_2, b_2\}} \cdot p_3^{\min\{a_3, b_3\}} \cdot p_4^{\min\{a_4, b_4\}};$$

$$[x, y] = p_1^{\max\{a_1, b_1\}} \cdot p_2^{\max\{a_2, b_2\}} \cdot p_3^{\max\{a_3, b_3\}} \cdot p_4^{\max\{a_4, b_4\}}.$$

Cum $\min\{a_k, b_k\} + \max\{a_k, b_k\} = a_k + b_k$, $1 \leq k \leq 4$, atunci deducem că:

$$(x, y) \cdot [x, y] = p_1^{\min\{a_1, b_1\} + \max\{a_1, b_1\}} \cdot p_2^{\min\{a_2, b_2\} + \max\{a_2, b_2\}} \cdot p_3^{\min\{a_3, b_3\} + \max\{a_3, b_3\}} \cdot p_4^{\min\{a_4, b_4\} + \max\{a_4, b_4\}} =$$

$$p_1^{a_1+b_1} \cdot p_2^{a_2+b_2} \cdot p_3^{a_3+b_3} \cdot p_4^{a_4+b_4} = x \cdot y.$$

După descompunerea numerelor x, y în factori primi, am „forțat” scrierea lor ca produse formate din aceeași factori primi punând, unde era cazul, exponentul zero.

Notă

Proprietatea are loc pentru oricare pereche de numere naturale și invităm cititorul să deducă o demonstrație analoagă cu cea prezentată mai sus.

Exerciții propuse

- 20.** Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, $[a, b] = 420$ și $a \cdot b = 12600$. Să se determine (a, b) .
- 21.** Considerăm șirul $(a_n)_n$ definit prin $a_n = n(n+1)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Să se scrie primii zece termeni ai șirului.
- b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toți termenii șirului $(a_n)_n$.
- 22.** Considerăm șirul $(b_n)_n$ definit prin $b_n = n(n+2)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Să se scrie primii zece termeni ai șirului.
- b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toți termenii șirului $(b_n)_n$.
- 23.** Considerăm șirul $(c_n)_n$ definit prin $c_n = n(n+1)(2n+1)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Să se scrie primii cinci termeni ai șirului.
- b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toți termenii șirului $(c_n)_n$.
- 24.** Considerăm șirul $(a_n)_n$ definit prin $a_n = n(n+1)(2n+34)$ pentru oricare $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Să se scrie primii doi termeni ai șirului.
- b) Să se determine cel mai mare număr natural d care divide toți termenii șirului $(a_n)_n$.

Exerciții rezolvate

25. Problema înmulțirii iepurilor. Matematicianul italian **Leonardo din Pisa** (cunoscut și cu porecla **Fibonacci**), în lucrarea sa „Liber Abbaci“, publicată în anul 1202, propune următoarea problemă:

Câte perechi de iepuri maturi se nasc dintr-o pereche după 12 luni, dacă fiecare pereche dă naștere unei singure perechi; perioada de gestație este de o lună iar fiecare pereche devine matură după o lună?

Soluție. Vom număra deci în fiecare lună perechile de iepuri maturi. Vom crea tabelul următor în care perechile mature le notăm cu M , iar perechile nou născute cu n , numai pentru primele cinci luni:

1	2	3	4	5
M	M	M	M	M
	n	M	M	M
		n	M	M
			n	M
			n	M
				n
				n
				n

Vom obține primii 5 termeni: 1, 1, 2, 3, 5.

Se observă că $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$. Continuând completarea tabelului vom obține: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Vor fi 144 de perechi de iepuri maturi după 12 luni.

26. Din problema precedentă s-a creat, apoi s-au studiat proprietăți ale șirului lui Fibonacci $(F_n)_{n \geq 1}$ definit astfel:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 1.$$

- Din modul de definire al șirului să se verifice primii 12 termeni.
- Să se scrie primii 20 de termeni ai șirului lui Fibonacci.
- Să se verifice că: $5 \mid F_5$, $5 \mid F_{10}$, $5 \mid F_{15}$, $5 \mid F_{20}$.
- Pentru diferite valori deja calculate, să se verifice că $F_n \mid F_{n \cdot k}$, unde n, k sunt naturale, nenule.
- Pentru diferite valori calculate ale termenilor șirului Fibonacci, să se verifice relația: $(F_m, F_n) = F_d$, unde $d = (m, n)$.

Soluție. a) $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$;
 $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$, $\dots$, $F_{12} = F_{11} + F_{10} = 144$.

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

c) $F_5 = 5 \cdot 5$, $F_{10} = 55 \cdot 5$, $F_{15} = 610 \cdot 5$, $F_{20} = 6765 \cdot 5$.

d) $F_3 \mid F_6$ deoarece $F_3 = 2$ și $F_6 = 8$, $2 \mid 8$; $F_3 \mid F_9$, deoarece $F_9 = 34$ și $2 \mid 34$.

e) De exemplu, $(F_8, F_6) = (21, 8) = 1 = F_2$, $(F_{12}, F_9) = (144, 34) = 2 = F_3$.

Notă

Uneori, se pornește în definirea șirului lui Fibonacci de la termenul F_0 pe care nu l-am definit. Îl vom defini astfel: $F_2 = F_1 + F_0$, de unde deducem $F_0 = F_2 - F_1$ sau $F_0 = 0$.

Astfel, vom putea defini șirul lui Fibonacci: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$.

Invităm cititorul de a căuta pe internet revista canadiană „Fibonacci Quarterly”. Această revistă impresionează prin bogăția de proprietăți care au fost deduse relativ la șirul lui Fibonacci sau la șirul lui Lucas. Credem că este o viitoare sursă pentru cititori, de a studia ceea ce s-a publicat și o invitație de a aduce noi contribuții pe acest filon.

Exerciții propuse

27. Să se verifice că oricare număr natural m , unde $1 \leq m \leq 30$, se scrie ca sumă de termeni distincți ai șirului lui Fibonacci.

28. Se consideră șirul lui Fibonacci definit astfel:

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad \forall n \geq 1.$$

- Să se scrie primii 12 termeni ai șirului.
- Să se arate că prin suma oricăror opt termeni consecutivi ai șirului nu este un termen al șirului.

c) Să se determine doi termeni ai șirului pentru care $F_k^2 = k^2$.

Exercițiu rezolvat

29. Se consideră șirul lui Lucas $(L_n)_{n \geq 0}$ definit astfel: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \geq 0$.

a) Să se scrie primii 12 termeni ai șirului lui Lucas.

b) Să se verifice relațiile:

i) $L_n^2 = 2L_{n+1}^2 - L_n^2 + 2L_{n-1}^2$;

ii) $25L_n^2 = 2L_{n+1}^2 - L_n^2 + 2L_{n-1}^2$, pentru $1 \leq n \leq 9$.

(pct. b) reprezintă pe caz particular problema B-1044 din revista „Fibonacci Quarterly“, Nr.1/2008-2009 propusă de Paul Bruckman, Sointula, Canada).

Indicație. a) 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199.

b) Pentru $n = 1$,

i) $L_1^2 = 1^2 = 1$, $2L_2^2 - L_1^2 + 2L_0^2 = 2 \cdot 1^2 - 1^2 + 2 \cdot 0^2 = 2 - 1 + 0 = 1$;

ii) $25F_1^2 = 25$, $2L_2^2 - L_1^2 + 2L_0^2 = 18 - 1 + 8 = 25$. Analog se verifică celelalte egalități.

Notă

Vă imaginați, că autorul problemei nu a enunțat afirmația plecând de la cazuri particulare. Noi am făcut acest traseu pentru a vă apropia de aceste șiruri interesante și a vă invita să le studiați în anii care urmează la un alt nivel de înțelegere.

Scriind primii 12 termeni ai șirului lui Fibonacci am observat că se divid cu 5 termenii: $F_5 = 5$, $F_{10} = 55$. În cazul șirului lui Lucas, din primii 12 termeni, niciunul dintre ei nu se divide cu 5.

Oare avem posibilitatea de a folosi un aparat matematic, ușor de înțeles, care să ne ajute în acest moment?

Divizibilitatea va putea fi studiată mai elegant și mai rapid cu ajutorul **congruenței modulo m** .

Matematicianul german **Carl F. Gauss**, în anul 1801, publică la vârsta de 24 de ani, celebrul său tratat: „Cercetări matematice“.

Gauss introduce noțiunea de congruență modulo m pe mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$, mulțime pe care încă nu am studiat-o, dar urmează să o studiem curând. Vom încerca să rezolvăm problemele propuse mai înainte și, de ce nu, și altele dificile cu ajutorul relației de congruență modulo m utilizată doar pe mulțimea $\mathbb{N}$ cunoscută nouă până acum.

Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Vom spune că **două numere naturale a , b sunt congruente modulo m** și scriem $a \equiv b \pmod{m}$, dacă a , b dau același rest la împărțirea prin m . Aceasta revine, prin utilizarea teoremei împărțirii cu rest, la a scrie: $a = m \cdot q + r$, $b = m \cdot q_1 + r$, unde $r, q, q_1 \in \mathbb{N}$, $r < m$.

Exemplu

Să considerăm modulul $m = 5$. Avem $7 \equiv 2 \pmod{5}$ deoarece $7 = 5 \cdot 1 + 2$, adică 2 reprezintă restul împărțirii lui 7 prin 5.

Analog, $144 \equiv 4 \pmod{5}$ deoarece $144 = 5 \cdot 28 + 4$, adică 4 reprezintă restul împărțirii lui 144 prin 5.

Exercițiu propus

30. Să se determine numărul natural r pentru care au loc următoarele congruențe:

- a) $53 \equiv r \pmod{5}$; b) $78 \equiv r \pmod{5}$; c) $56 \equiv r \pmod{10}$;
d) $233 \equiv r \pmod{10}$; e) $256 \equiv r \pmod{11}$.

Exerciții rezolvate

31. Dacă $m \in \mathbb{N}^*$ și $a \equiv r_1 \pmod{m}$, $b \equiv r_2 \pmod{m}$ atunci $a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{m}$, dacă $r_1 + r_2 < m$ sau $a + b \equiv r_1 + r_2 - m \pmod{m}$, dacă $r_1 + r_2 \geq m$.

Soluție. Aplicăm teorema împărțirii cu rest: $a = m \cdot q_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < m$, $b = m \cdot q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < m$. Prin adunarea celor două egalități obținem:

$$a + b = m \cdot (q_1 + q_2) + (r_1 + r_2).$$

Dacă $r_1 + r_2 < m$, atunci din unicitatea restului și câtului rezultă:

$$a + b \equiv r_1 + r_2 \pmod{m}.$$

Dacă $r_1 + r_2 \geq m$, din inegalitățile $r_1 < m$ și $r_2 < m$ avem $r_1 + r_2 < 2m$, de unde $r_1 + r_2 - m < m$, unde de fapt restul împărțirii lui $r_1 + r_2$ prin m este $r_1 + r_2 - m$.

Rezultă $a + b \equiv r_1 + r_2 - m \pmod{m}$.

Exemple

1) $7 \equiv 2 \pmod{5}$, $21 \equiv 1 \pmod{5}$ atunci $7 + 21 \equiv 2 + 1 \pmod{5}$ sau $28 \equiv 3 \pmod{5}$. Avem $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_1 + r_2 < 5$.

2) $8 \equiv 3 \pmod{5}$, $19 \equiv 4 \pmod{5}$, atunci $27 \equiv 2 \pmod{5}$. Avem $r_1 = 3$, $r_2 = 4$ și $r_1 + r_2 = 7 > 5$, deci vom considera $r_1 + r_2 - 5 = 2$ ca fiind restul împărțirii lui $a + b$ prin 5.

Mai precizăm că pentru $a \in \mathbb{N}$, $5 \mid a \Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{5}$. Într-adevăr, $5 \mid a$ dacă și numai dacă restul împărțirii lui a prin 5 este egal cu 0.

Cu aceste noi „arme“ cu care suntem înzestrați să revenim la problema propusă privind divizibilitatea prin 5 a termenilor din șirurile lui Fibonacci și Lucas.

32. a) Să se determine numerele cu care sunt congruente primii 26 de termeni din șirul lui Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $\forall n \geq 0$

b) Să se determine numerele cu care sunt congruente primii 26 de termeni din șirul lui Lucas $(L_n)_{n \geq 0}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, $\forall n \geq 0$.

c) Considerând pentru fiecare din șirurile date, șirurile formate din numerele cu care sunt congruente modulo 5, să se determine periodicitatea acestor șiruri.

d) Să se deducă toți termenii din șirul lui Fibonacci care sunt divizibili cu 5.

e) Să se arate că niciun termen din șirul lui Lucas nu se divide cu 5.